
Model Order Reduction Techniques for Circuits and Systems With Large Number of Ports

MASTER THESIS

BY

CRYSOSTOMOS A. CHATZIGEORGIOU



DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING
UNIVERSITY OF THESSALY

A dissertation submitted to the University of Thessaly in
accordance with the requirements of the degree of Master
of Science in the Faculty of Engineering.

SUPERVISORS
NESTORAS EVMORFOPOULOS
GEORGE STAMOULIS
GERASIMOS POTAMIANOS

VOLOS, FEBRUARY 2018

Μέθοδοι Υποβιβασμού Τάξης Μοντέλου για Κυκλώματα και Συστήματα με Μεγάλο Αριθμό Θυρών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ Α. ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Επιβλέποντες
Νέστορας Ευμορφόπουλος
Γεώργιος Σταμούλης
Γεράσιμος Ποταμιάνος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 1η Μαρτίου 2018

.....
Νέστορας Ευμορφόπουλος
Επικουρος Καθηγητής

.....
Γεώργιος Σταμούλης
Καθηγητής

.....
Γεράσιμος Ποταμιάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Μεταπτυχιακή Διατριβή για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος Ειδίκευσης «Επιστήμη και Τεχνολογία Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών» του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

.....
Χρυσόστομος Α. Χατζηγεωργίου
Διπλωματούχος Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών
και Δικτύων Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Copyright © Chrysostomos Chatzigeorgiou, 2018
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Στην οικογένεια & στους φίλους μου

Με την ολοκλήρωση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας, φτάνουν στο τέλος τους οι μεταπτυχιακές μου σπουδές στο Τμήμα. Σε αυτά τα χρόνια γνώρισα ανθρώπους, έκανα φιλίες και έμαθα να μαθαίνω. Στο σημείο αυτό, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους αυτούς με τους οποίους συνεργάστηκα και συναναστράφηκα αυτά τα χρόνια. Ειδικά τους καθηγητές και τους φίλους μου.

Ιδιαίτερη αναφορά θα ήθελα να κάνω στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Νέστορα Ευμορφόπουλο για την εμπιστοσύνη που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας στο πρόσωπό μου, τη συνεχή καθοδήγησή του, καθώς επίσης και για τη γενικότερη αρωγή του σ' όλη την προσπάθεια. Θα ήταν παράλειψή μου αν δεν ευχαριστούσα τους συνεπιβλέποντες καθηγητές κ.Γιώργο Σταμούλη και κ.Γεράσιμο Ποταμιάνο για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις τους, όχι μόνο στην παρούσα εργασία, αλλά και στη διάρκεια των σπουδών μου. Ακόμη, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον φίλο και υποψήφιο διδάκτορα του τμήματος Γιώργο Φλώρο για την όλη συνεργασία καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης εργασίας. Χωρίς τη βοήθεια και τη στήριξή του, η παρούσα εργασία δε θα είχε ολοκληρωθεί. Επίσης, επιθυμώ να εκφράσω ευχαριστίες στους φίλους και συναδέλφους από το εργαστήριο Ηλεκτρονικής του τμήματος Χαράλαμπο Αντωνιάδη, Δημήτρη Γαρυφάλλου και Ευάγγελο Νόνα για τις συμβουλές τους.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ δικαιωματικά ανήκει στην οικογένεια μου, η οποία με στήριξε και σ' αυτό μου το βήμα. Στους γονείς μου, Αναστάσιο και Μαρία, που χάρις στις θυσίες και τους αγώνες των οποίων όλα αυτά τα χρόνια κατάφερα να πραγματοποιήσω τους στόχους και τα όνειρά μου και γενικότερα, τα πάντα στη ζωή μου, στα αδέρφια μου, Δημήτρη, Γιάννη, Ευθυμία, Δέσποινα, οι οποίοι ήταν δίπλα μου σε κάθε δύσκολη στιγμή και στη Στέλλα, η οποία είναι δίπλα μου σε κάθε προσπάθεια.

Χρυσόστομος Α. Χατζηγεωργίου
Βόλος, Φεβρουάριος 2018

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων	v
Κατάλογος σχημάτων	vi
Κατάλογος Συντομογραφιών	vii
Περίληψη	viii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Περιγραφή του προβλήματος	1
1.2 Σκοπός της εργασίας	2
1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας	2
2 Μαθηματικό υπόβαθρο	5
2.1 Χώρος κατάστασης	5
Διάνυσμα κατάστασης	5
Δυναμικές εξισώσεις	5
2.2 Εξισώσεις MNA	7
Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία	7
Εξισώσεις τοπολογίας	8
Νόμοι του Kirchhoff	8
Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων	9
2.3 Γραμμικά συστήματα	12
Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις	12
Μηδενικά και Πόλοι	14
Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις	14
2.4 Ορθοκανονική βάση	16
2.5 Υπόχωροι Krylov	17
3 Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου	19
3.1 Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου SPRIM	19
Υλοποίηση της SPRIM	19
Παρατηρήσεις	21
4 DEMOR: Μια διαφορετική προσέγγιση	25
4.1 Ιδανικά αποκεντρωμένα συστήματα	26
4.2 Πίνακας διάταξης κέρδους	26

4.3	Ο αλγόριθμος DEMOR	30
5	Υλοποίηση μεθόδων MOR στην προσομοίωση κυκλωμάτων	33
5.1	Κατασκευή ενός προσομοιωτή	33
	Αρχείο περιγραφής κυκλώματος	33
	MNA σύστημα του κυκλώματος	34
	Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου	34
	Εφαρμογή της νέας μεθόδου αποκεντροποίησης συστημάτων	35
	Επιπρόσθετες παρατηρήσεις	35
6	Πειραματικά αποτελέσματα	37
6.1	Ανάλυση υλοποίησης	37
6.2	Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης	38
6.3	Παρατηρήσεις	42
7	Επίλογος	43
7.1	Μελλοντικές προεκτάσεις	43
	Βιβλιογραφία	45

Κατάλογος πινάκων

6.1	Ενδεικτικό benchmark.	39
6.2	Συγκεντρωτικό διάγραμμα αποτελεσμάτων.	42
6.3	Χαρακτηριστικά του συστήματος.	42

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Ενδεικτική μορφή MOR.	2
2.1	Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC.	5
2.2	Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία (αντίσταση, πυκνωτής και πηνίο).	7
2.3	Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα.	8
2.4	Ενδεικτικό παράδειγμα: πορεία προς τον τελικό γράφο.	9
2.5	Σύστημα με είσοδο και έξοδο.	12
2.6	Αναπαράσταση Μ/Σ Laplace στο μιγαδικό επίπεδο.	14
2.7	Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MNA εξισώσεων.	16
4.1	Ενωμένο 2x2 σύστημα.	27
4.2	Αποκεντρωμένο 5x5 σύστημα.	31
6.1	ORIGINAL - SPRIM.	39
6.2	ORIGINAL - DEMOR.	40
6.3	DEMOR - SPRIM.	41

Κατάλογος Συντομογραφιών

MOR Model Order Reduction

DEMOR Decentralized Model Order Reduction

SPRIM Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling

MNA Modified Nodal Analysis

NA Nodal Analysis

CAD Computer Aided Design

SPD Symmetric Positive Definite

RGA Relative Gain Array

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έχει ως στόχο τη μελέτη και υλοποίηση μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίτευξη υποβιβασμού τάξης μοντέλου σε κυκλώματα με μεγάλο αριθμό εισόδων και εξόδων. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι χρησιμοποιούνται τόσο στην προσομοίωση, όσο και στον σχεδιασμό των κυκλωμάτων.

Η συνεχής ανάγκη παραγωγής κυκλωμάτων με ανοχή σε λάθη, αλλά και συμπεριφορά, η οποία θα είναι κατά κύριο λόγο όπως την επιθυμεί ο σχεδιαστής, οδήγησε την επιστήμη στη συνεχή μοντελοποίηση των κυκλωμάτων σε περιβάλλοντα προσομοίωσης. Στο πέρασμα των χρόνων όμως τα κυκλώματα έγιναν και θα συνεχίσουν να γίνονται όλο και πιο περίπλοκα. Γι' αυτόν λοιπόν το λόγο, είναι επιτακτικό να βρεθούν τρόποι, οι οποίοι να επιτρέπουν την ευκολότερη και κυρίως γρηγορότερη προσομοίωση αυτών των κυκλωμάτων.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα σχήμα μεθόδου υποβιβασμού τάξης μοντέλου βασισμένο στον αλγόριθμο της SPRIM, όπου ένα σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων (MIMO) μετατρέπεται σ' έναν αριθμό υποσυστημάτων. Το κάθε υποσύστημα αντιστοιχεί σε μια έξοδο και αρκετές «ισχυρές» εισόδους.

Η διαδικασία της αποσύνδεσης βασίζεται στο πίνακα διάταξης κέρδους RGA (*Relative Gain Array*), ο οποίος υπολογίζει το βαθμό αλληλεπίδρασης κάθε ζεύγους εισόδου-εξόδου. Μέσα από μελέτη κατέστη σαφές ότι οι περισσότερες συσχετίσεις εισόδου-εξόδου δεν είναι σημαντικές, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά συμπαγή μοντέλα, ακόμη και για συστήματα με μεγάλο αριθμό θυρών.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Μέσα από την πάροδο των χρόνων, έχει παρατηρηθεί η αυξημένη χρήση τόσο των ηλεκτρονικών, όσο και των ηλεκτρικών συσκευών. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια την πολλαπλή χρήση ηλεκτρονικών και ηλεκτρικών στοιχείων στις συσκευές. Λόγω της αύξησης αυτής, η συμπεριφορά των κυκλωμάτων πλέον δεν μπορεί να υπολογιστεί δίχως τη χρήση κάποιου προσομοιωτή. Κάθε κύκλωμα λοιπόν προσομοιώνεται σε κάποια υπολογιστική μονάδα προκειμένου να διαπιστωθεί η ορθότητά του.

Θα ήταν πολύ χρονοβόρο, αλλά ταυτόχρονα και αρκετά δαπανηρό η κατασκευή κυκλωμάτων, τα οποία τελικά δεν θα είχαν την αναμενόμενη συμπεριφορά. Οι προσομοιωτές αναλαμβάνουν, με βάση κάποια μαθηματικά μοντέλα, να αναλύσουν τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Προκειμένου λοιπόν να επιτευχθεί μια προσομοίωση, η μοντελοποίηση των κυκλωμάτων θα πρέπει να βασίζεται πάνω σε συγκεκριμένα εργαλεία και αλγορίθμους. Έτσι λοιπόν, δημιουργήθηκαν τα εργαλεία CAD, τα οποία διευκολύνουν τη μοντελοποίηση των κυκλωμάτων στο ευρύτερο σύνολο των μηχανικών.

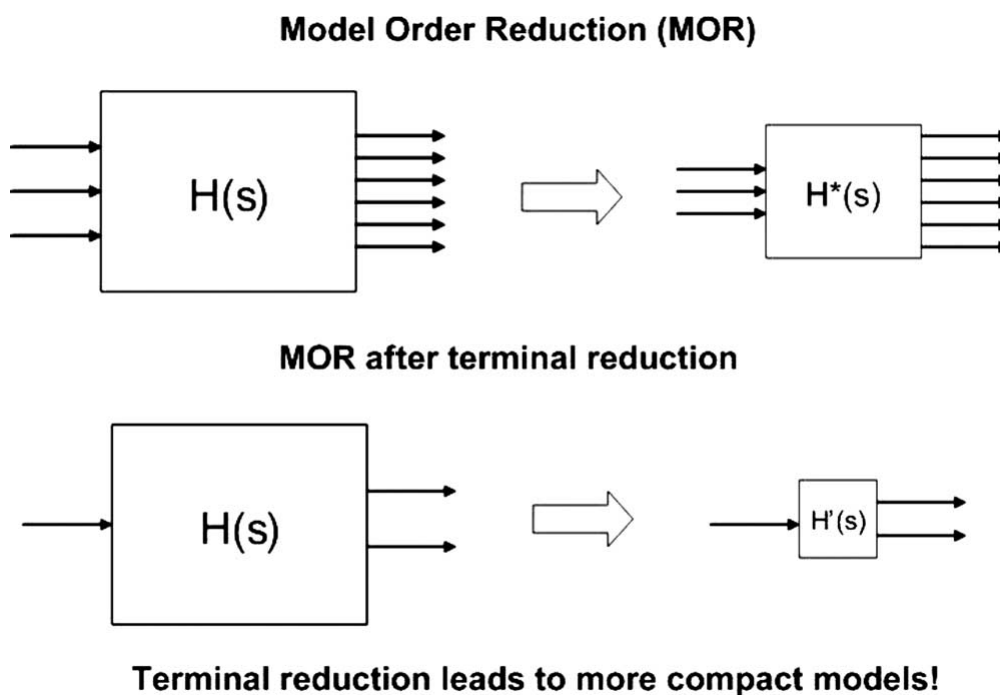
Αυτή η διαρκής αύξηση των στοιχείων έχει κάνει αρκετά περίπλοκη, όχι μόνο την κατασκευή των κυκλωμάτων, αλλά και την προσομοίωσή τους ώστε να διαπιστωθεί η ορθότητά τους. Λογικό αποτέλεσμα της αύξησης των απαιτήσεων των κυκλωμάτων σε πόρους, κυρίως μνήμης και επεξεργαστικής δύναμης, ήταν η ανάθεση της προσομοίωσής τους σε όλο και δυνατότερα μηχανήματα. Πέραν αυτού του γεγονότος έχει αρχίσει παράλληλα η αναζήτηση τρόπων ώστε να απλοποιηθούν αυτά τα κυκλώματα και να καταστεί όλο και γρηγορότερη η προσομοίωση τους, ώστε να υπάρξουν όσο το δυνατόν γρηγορότερα αποτελέσματα.

Το μέγεθος των προβλημάτων, τα οποία πρέπει να επιλύονται καθημερινά είναι αρκετά μεγάλο και συνήθως απαιτούνται μεγάλοι, αν όχι εξωπραγματικοί, ως προς τη λύση τους χρόνοι. Ως μηχανικοί λοιπόν καλούμαστε να βρούμε τρόπο και λύση ώστε η προσομοίωση κυκλωμάτων να γίνεται πολύ ταχύτερα και μέσα σε πραγματικούς χρόνους.

1.2 Σκοπός της εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η τροποποίηση μιας μεθόδου μοντελοποίησης του αρχικού συστήματος σε πολλά μικρότερα συστήματα (Σχήμα 1.1). Πιο συγκεκριμένα θα παρατηρηθεί πως η μέθοδος αυτή φτάνει στο σημείο να σπάει το αρχικό κύκλωμα σε πολλά επιμέρους υπό-κυκλώματα κάνοντας χρήση της συνάρτησης μεταφοράς, η οποία είχε προέλθει από κάποια μέθοδο MOR. Οι μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου είναι μια τεχνική, η οποία βοηθά στη μείωση της πολυπλοκότητας των μαθηματικών μοντέλων, κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Έτσι εφαρμόζοντας μια τέτοια μέθοδο είναι προφανές πως ο χρόνος της προσομοίωσης θα μειωθεί αρκετά, λόγω του μικρότερου αριθμού εξισώσεων, οι οποίες προκύπτουν για λύση.

Στόχος βέβαια αποτελεί αφενός μεν η γρηγορότερη επίλυση των συστημάτων και έτσι μια γρηγορότερη προσομοίωση, αφετέρου δε η ακρίβεια της λύσης. Μέσα από κατάλληλους ελέγχους τόσο στο αρχικό, όσο και στο ελαχιστοποιημένο σύστημα που παρήγαγε η μέθοδος MOR έγινε αντιληπτό πως η ακρίβεια της λύσης δεν επηρεαζόταν σημαντικά [1] [2].



Σχήμα 1.1: Ενδεικτική μορφή MOR.

1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται ένα θεωρητικό υπόβαθρο ώστε να γίνουν ευκολότερα κατανοητά τα μαθηματικά εργαλεία, τα οποία χρειάζονται.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια εισαγωγή στις μεθόδους υποβιβασμού τάξης μοντέλου και στη συνέχεια γίνεται εκτενής αναφορά στον αλγόριθμο *SPRIM*, τόσο ως προς την υλοποίηση όσο και ως προς την επεξήγησή της.

Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται λεπτομερής αναφορά του νέου αλγορίθμου, ο οποίος μελετήθηκε και υλοποιήθηκε, μαζί με τις μαθηματικές σχέσεις, ένα μικρό, αλλά ταυτόχρονα αναλυτικό παράδειγμα σχετικά με το τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου.

Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθεται ο τρόπος και τα βήματα σύμφωνα με τα οποία γίνεται μια προσομοίωση, καθώς και πώς χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου στην παρούσα προσομοίωση.

Μετά την περιγραφή και την πορεία της προσομοίωσης, στο Κεφάλαιο 6 παρατίθενται τα αποτελέσματα που λήφθηκαν δοκιμάζοντας διάφορα πειράματα πάνω στο σύστημα και καταγράφοντας τη συμπεριφορά που παρουσιαζόταν από την εφαρμογή.

Τέλος, η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 7, όπου αναφέρεται η συνολική εικόνα που αποκομίσθει από την εργασία πάνω στο θέμα αυτό κατά τη διάρκεια όλης της σχετικής έρευνας.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό υπόβαθρο

2.1 Χώρος κατάστασης

Ως κατάσταση (state) ενός συστήματος τη χρονική στιγμή t_0 ορίζεται το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας τη χρονική στιγμή t_0 , η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$ [15].

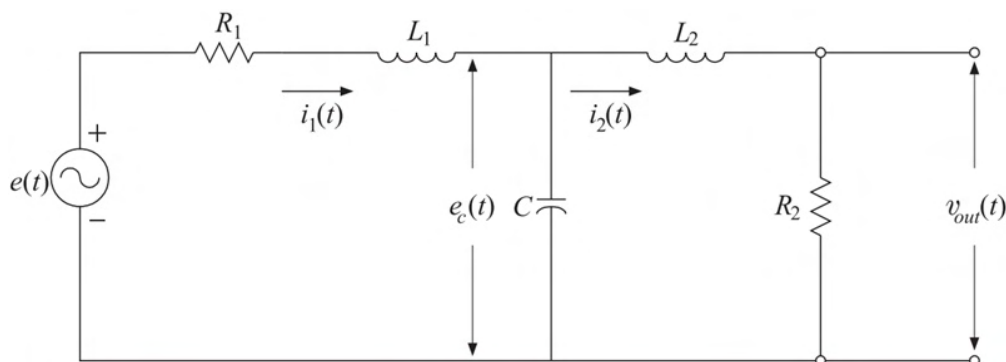
Διάνυσμα κατάστασης

Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος είναι γνωστές σαν μεταβλητές κατάστασης. Σαν διάνυσμα κατάστασης λοιπόν θεωρείται ένα διάνυσμα, του οποίου οι συνιστώσες αποτελούνται από τις μεταβλητές κατάστασης.

Δυναμικές εξισώσεις

Στη συνέχεια μέσα από ένα ενδεικτικό παράδειγμα, θα καταδειχθεί ο τρόπο κατασκευής των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος.

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC.

Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchhoff προκύπτει:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = R_1 i_1(t) - e_c(t) + e(t) \quad (2.1)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = -R_2 i_2(t) + e_c(t) \quad (2.2)$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \quad (2.3)$$

$$V_{out}(t) = i_2(t) R_2 \quad (2.4)$$

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, το ζητούμενο είναι η τάση στην έξοδο, δηλαδή το V_{out} . Σ' αυτό το σημείο του προβλήματος, θα ήταν καλό να οριστούν οι μεταβλητές κατάστασης και στη συνέχεια το αντίστοιχο διάνυσμα κατάστασης. Επιλέγονται ως μεταβλητές κατάστασης η τάση $e_c(t)$, η οποία εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή και τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ που εμφανίζονται. Επομένως, το διάνυσμα κατάστασης που δημιουργείται και το οποίο θα συμβολιστεί σ' αυτό το παράδειγμα με $\underline{x}(t)$ είναι:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix}$$

Κάνοντας μια μικρή αναδιάρθρωση των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος, δηλαδή των σχέσεων (2.1) έως (2.4), προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{c} & \frac{-1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (2.5)$$

και

$$V_{out}(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Έτσι οι σχέσεις (2.5) και (2.6) μπορούν να γραφτούν και ως

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b} e(t) \quad (2.7)$$

$$V_{out}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (2.8)$$

Η εξίσωση που περιγράφεται στη σχέση (2.7) ονομάζεται καταστατική εξίσωση και η εξίσωση που περιγράφει η (2.8) ορίζεται ως εξίσωση εξόδου, όπου η γενική μορφή αυτών των εξισώσεων είναι

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \quad (2.9)$$

$$V_{out}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + du(t) \quad (2.10)$$

Οι εξισώσεις, λοιπόν, που δείχνουν τη συσχέτιση μεταξύ εισόδου και εξόδου, αλλά και μεταβλητών κατάστασης, ονομάζονται δυναμικές.

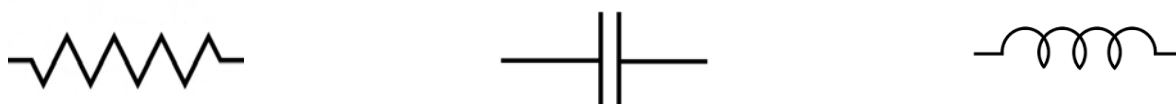
Το παραπάνω παράδειγμα, από το οποίο κατέστη σαφές τόσο ο τρόπος δημιουργίας της καταστατικής εξίσωσης, όσο και της εξίσωσης εξόδου, για λόγους ευκολότερης κατανόησης αναφερόταν σε σύστημα το οποίο είχε σαν διέγερση μια είσοδο και έβγαζε μια έξοδο (Simple Input Simple Output - SISO). Κατά κύριο λόγο απασχόλησαν την έρευνα συστήματα με πολλαπλό αριθμό εισόδων όσο και εξόδων (Multiple Input Multiple Output - MIMO) [9].

2.2 Εξισώσεις MNA

Σ' αυτό το σημείο, θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο προσομοιώνονται τα κυκλώματα. Σημείο εκκίνησης είναι η επεξεργασία ενός αρχείου περιγραφής κυκλώματος από τον προσομοιωτή. Αυτό γίνεται μέσω μίας διαδικασίας, η οποία έχει σαν σκοπό την ανάγνωση και κατανόηση του κυκλώματος μέσα από μια προκαθορισμένη μορφή που θα δοθεί μέσα από κάποιο αρχείο. Θα γίνει αναλυτική περιγραφή όλων των σταδίων δημιουργίας των MNA εξισώσεων [10].

Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία

Τα γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία είναι η αντίσταση, το πηνίο και ο πυκνωτής (Σχήμα 2.2). Κατά την αναγνώριση αυτών των στοιχείων μέσα από την ανάγνωση του αρχείου που περιγράφει το κύκλωμα, τίθεται ο πρώτος κόμβος ως θετικά ορισμένος και ο δεύτερος ως αρνητικά ορισμένος.



Σχήμα 2.2: Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία (αντίσταση, πυκνωτής και πηνίο).

Είναι ευρέως γνωστό στην επιστήμη της φυσικής πως το ρεύμα πηγαίνει από το υψηλότερο προς το χαμηλότερο δυναμικό. Ακόμη ένα κύκλωμα χωρίς πηγές, είτε τάσης είτε ρεύματος, δεν έχει λύση.

Εξισώσεις τοπολογίας

Έστω $V = 0, 1, \dots, n - 1$ το σύνολο των κόμβων (nodes) ή κορυφών (vertices) και $E = e_1, \dots, e_m$ το σύνολο των m κλάδων (branches) ή ακμών (edges). Ο ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης, ως προς τον κόμβο αναφοράς, όπου είναι η γείωση και θα τον συμβολίζουμε με 0, του γράφου του κυκλώματος ορίζεται ως:

$$A_{i,j} = \begin{cases} +1 & , \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1 & , \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0 & , \text{εάν ο κλάδος } j \text{ δε συνδέεται με τον κόμβο } i. \end{cases}$$

Οι διαστάσεις του πίνακα A είναι $(n - 1) \times m$

Νόμοι του Kirchhoff

Εαν:

$$\underline{u}(t) = [u_1(t) \quad , \dots \quad , u_m(t)]^T \quad (2.11)$$

$$\underline{V}(t) = [V_1(t) \quad , \dots \quad , V_m(t)]^T \quad (2.12)$$

$$\underline{i}(t) = [i_1(t) \quad , \dots \quad , i_m(t)]^T \quad (2.13)$$

Από το νόμο τάσεων του Kirchhoff (Kirchhoff Voltage Law ή KVL) προκύπτει:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t)$$

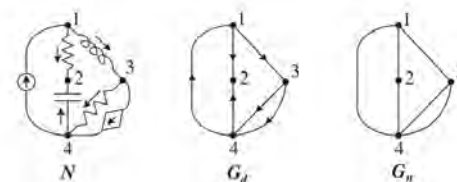
που λέει δηλαδή πως η τάση κατά μήκος κάθε κλάδου, είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού των άκρων του κόμβου.

Από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (Kirchhoff Current Law ή KCL) προκύπτει:

$$A \underline{i}(t) = 0$$

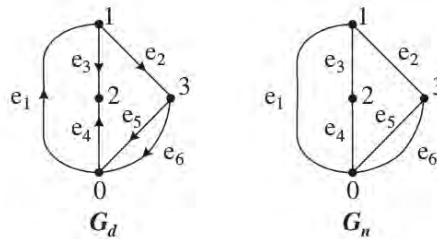
που λέει δηλαδή πως το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που προσπίπτουν είναι 0.

Ακολουθεί ένα σύντομο παράδειγμα που δείχνει τον τρόπο δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης μέσα από ένα κύκλωμα.



Σχήμα 2.3: Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα.

Στην εικόνα (2.3) φαίνεται ένα ενδεικτικό κύκλωμα με μικρό αριθμό στοιχείων, όπου με βάση τις διαδικασίες που περιγράφηκαν φτάσαμε στο τελικό γράφο του σχήματος (2.4). Από τους



Σχήμα 2.4: Ενδεικτικό παράδειγμα: πορεία προς τον τελικό γράφο.

κανόνες σχετικά με την κατασκευή του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης προκύπτει ο εξής πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Από τον KVL έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Τέλος, από τον KCL έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων

Τα m στοιχεία του κυκλώματος χωρίζονται σε δύο ομάδες:

- 1) Στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή

$$i_k(t) = g_k u(t) + C_k \frac{du_k(t)}{dt} + S_k(t) \quad (2.14)$$

Σ' αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται αντιστάσεις, χωρητικότητες και πηγές ρεύματος.

2) Στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις δεν μπορούν να γραφτούν όπως παραπάνω. Περιλαμβάνονται πηγές τάσης και αυτεπαγωγές.

Χωρίζεται ο ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης A και τα διανύσματα $\underline{i}(t)$ και $\underline{u}(t)$ σε υπό-πίνακες και υπό-διανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο ομάδες στοιχείων ως εξής:

$$A = [A_1 \quad A_2] \quad (2.15)$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\underline{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

όπου οι υπό-πίνακες έχουν τις εξής διαστάσεις:

$$A_1 \rightarrow (n-1) \times m_1,$$

$$A_2 \rightarrow (n-1) \times m_2,$$

$$u_1 \rightarrow m_1 \times 1,$$

$$u_2 \rightarrow m_2 \times 1,$$

$$i_1 \rightarrow m_1 \times 1,$$

$$i_2 \rightarrow m_2 \times 1.$$

Στους παραπάνω συμβολισμούς, γίνεται υπόθεση πως m_1 είναι τα στοιχεία της ομάδας 1, δηλαδή για αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος, και m_2 τα στοιχεία της ομάδας 2, δηλαδή πηνία και πηγές τάσης ($m = m_1 + m_2$).

Από τον KCL όπως παρατηρήθηκε και παραπάνω ισχύει:

$$A\underline{i}(t) = \underline{0} \Leftrightarrow A_1\underline{i}_1(t) + A_2\underline{i}_2(t) \quad (2.18)$$

και απο τον KVL:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) = A_1^T \underline{V}(t) \\ u_2(t) = A_2^T \underline{V}(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

καθώς

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}$$

με:

$$A_1^T \rightarrow m_1 \times (n-1)$$

$$A_2^T \rightarrow m_2 \times (n-1)$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας 1 γράφονται υπό τη μορφή πίνακα:

$$\underline{i}_1(t) = G\underline{u}_1(t) + C\frac{d\underline{u}_1(t)}{dt} + \underline{S}_1(t) \quad (2.20)$$

όπου:

G : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_1 \times m_1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των αντιστάσεων και μηδενικά σε εκείνες των χωρητικότητων και των πηγών ρεύματος.

C : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_1 \times m_1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στην θέση των χωρητικότητων.

\underline{S}_1 : είναι ένα διάνυσμα $m_1 \times 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των πηγών ρεύματος.

$i_k = g_k u_k(t)$: όταν ο k -κλάδος είναι αντίσταση.

$i_m = C_m \frac{du_m(t)}{dt}$: όταν ο m -κλάδος είναι χωρητικότητα.

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας 2 γράφονται υπό τη μορφή πίνακα:

$$\underline{u}_2(t) = L\frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} + \underline{S}_2(t) \quad (2.21)$$

όπου:

L : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_2 \times m_2$ και μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των αυτεπαγωγών.

\underline{S}_2 : είναι ένα διάνυσμα $m_2 \times 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των πηγών τάσης.

Κάνοντας αντικατάσταση την πρώτη σχέση της (2.19) στη (2.20) και στη συνέχεια, το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης στην (2.18) προκύπτει η εξής σχέση:

$$A_1 G A_1^T \underline{V}(t) + A_1 C A_1^T \frac{d\underline{V}(t)}{dt} + A_2 \underline{i}_2(t) = -A_1 \underline{S}_1(t) \quad (2.22)$$

Επίσης με ανάλογη λογική, κάνοντας αντικατάσταση τη δεύτερη σχέση της (2.19) στην (2.21) προκύπτει η σχέση:

$$A_2^T \underline{V}(t) - L \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} = \underline{S}_2(t) \quad (2.23)$$

Η (2.22) είναι σύστημα με $(n - 1)$ εξισώσεις και η (2.23) είναι σύστημα m_2 εξισώσεων με $(n - 1) + m_2$ αγνώστους των $\underline{V}(t)$ και $\underline{i}_2(t)$.

Ακολουθεί μια τελευταία αναλυτική και συμπυκνωμένη περιγραφή των διαστάσεων του κάθε πίνακα:

$$A_1 \rightarrow (n - 1) \times m_1,$$

$$G \rightarrow m_1 \times m_1,$$

$$A_1^T \rightarrow m_1 \times (n - 1),$$

$$\underline{V} \rightarrow (n - 1) \times 1,$$

$$A_2 \rightarrow (n - 1) \times m_2,$$

$$\underline{i}_2 \rightarrow m_2 \times 1,$$

$$A_2^T \rightarrow m_2 \times (n-1),$$

$$\underline{V} \rightarrow (n-1) \times 1,$$

$$\rightarrow m_2 \times m_2,$$

$$\underline{i}_2 \rightarrow m_2 \times 1.$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων εξισώσεων, δηλαδή των (2.22) και (2.23), μας δίνει ένα σύστημα διάστασης $[(n-1) + m_2] \times [(n-1) + m_2]$, το οποίο αναπαριστάται σε έναν επεκταμένο σύνθετο πίνακα:

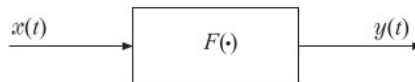
$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ -A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}(t) \\ \underline{i}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{V}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \underline{S}_1(t) \\ \underline{S}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

όπου η σχέση (2.24) περιγράφει την *MNSAnalysis* του συστήματος.

2.3 Γραμμικά συστήματα

Στο σχήμα (2.5), η έξοδος του $y(t)$ στη γενική της μορφή γράφεται ως

$$y(t) = F[x(t)]$$



Σχήμα 2.5: Σύστημα με είσοδο και έξοδο.

Ένα σύστημα το οποίο είναι σε ηρεμία λέγεται πως είναι γραμμικό αν και μόνο αν δοθέντων δύο οποιονδήποτε σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ισχύει

$$F[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 F[x_1(t)] + \alpha_2 F[x_2(t)]$$

Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

Μια συνάρτηση $H(s)$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, η οποία περιγράφει μια σχέση μεταξύ του μετασχηματισμού *Laplace* της εξόδου και της εισόδου του συστήματος, υπό την προϋπόθεση πως το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί πως με κατάλληλες ενέργειες, έχοντας σαν σημείο εκκίνησης τις εξισώσεις (2.9) και (2.10), οι οποίες ήταν αντικείμενο μελέτης σε παραπάνω ενότητα, μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος. Παίρνοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μια από αυτές τις σχέσεις προκύπτει:

$$sX(s) - \underline{x}(0) = AX(s) + \underline{b}V(s) \Rightarrow$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{b}V(s)$$

και

$$Y(s) = \underline{c}^T \underline{X}(s) + dV(s) \quad (2.25)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες, όταν δηλαδή έχει νόημα η συνάρτηση μεταφοράς υπάρχουν τα παρακάτω:

$$\frac{\underline{X}(s)}{V(s)} = (sI - A)^{-1}\underline{b}$$

$$\frac{Y(s) - dV(s)}{V(s)\underline{c}^T} = X(s) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s) - dV(s)}{V(s)\underline{c}^T} = (sI - A)^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$

$$Y(s) - dV(s) - (sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) - V(s)((sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T + d) = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = V(s)((sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T + d) \Rightarrow$$

και τελικά προκύπτει η σχέση:

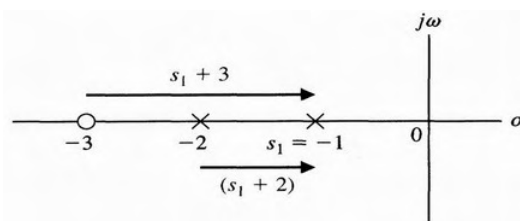
$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1}\underline{b} + d \quad (2.26)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα έχει να τονισθεί πως συστήματα με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο από αυτόν του παρανομαστή δεν μπορούν να περιγραφούν από δυναμικές εξισώσεις στο χώρο κατάστασης, επομένως δεν έχουν λύση. Αυτό συμβαίνει επειδή το σύστημά θα πρέπει να είναι ΦΕΦΕ (φραγμένη είσοδος φραγμένη έξοδος) ευσταθές, που είναι με βάση τις παραπάνω συνθήκες, δηλαδή βαθμός αριθμητή μικρότερος από τον βαθμό του παρανομαστή. Σε αντίθετη περίπτωση, από τη διαίρεση αριθμητή με παρανομαστή προκύπτουν όροι της μορφής cs^k , $k > 0$. Αυτοί οι όροι είναι δυνατόν να προκαλέσουν την παρουσία μη φραγμένων σημάτων στην έξοδο, ακόμη και αν η είσοδος του συστήματος είναι φραγμένη. Για παράδειγμα: Έστω ότι ένας όρος της $H(s)$ είναι ίσος με cs και ως είσοδος η βηματική συνάρτηση $u(t)$ όπου ο μετασχηματισμός Laplace δίνει $\frac{1}{s}$. Τότε η αντίστοιχη έξοδος που δίνεται ως $L^{-1}\{cs\frac{1}{s}\} = c\delta(t)$ είναι προφανώς μη φραγμένη.

Μηδενικά και Πόλοι

Από την συνάρτηση μεταφοράς που υπολογίστηκε παραπάνω μπορούν να συναχθούν μερικά χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του συστήματος. Πιο πριν όμως θα ορίσουν δύο έννοιες οι οποίες θα ήταν καλό να ανακληθούν στη μνήμη. Ορίζονται λοιπόν σαν μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς, οι τιμές εκείνες για τις οποίες το πολυώνυμο του αριθμητή έχει μηδενική τιμή. Αντίστοιχα, πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ορίζονται οι τιμές εκείνες, για τις οποίες μηδενίζεται το πολυώνυμο του παρονομαστή της συνάρτησης.

Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γίνει στο μιγαδικό επίπεδο, με τη χρήση των μηδενικών και των πόλων (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6: Αναπαράσταση M/Σ Laplace στο μιγαδικό επίπεδο.

Ο yy' άξονας όπως παρατηρείται απεικονίζει το φανταστικό κομμάτι και το xx' το πραγματικό κομμάτι. Επίσης με \times συμβολίζονται οι πόλοι και με \circ τα μηδενικά.

Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις

Θα ήταν χρήσιμο σε αυτή τη φάση, να παρουσιαστούν πιο ξεκάθαρα το πως σχετίζονται οι MNA εξισώσεις με τις δυναμικές [4]. Έστω οι MNA εξισώσεις

$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_{in}(t)$$

και

$$u_{out}(t) = L^T x \quad (2.27)$$

Οι παραπάνω είναι οι MNA εξισώσεις ενός MIMO συστήματος και το x είναι το διάνυσμα κατάστασης. Επίσης $U_{in}(t)$ είναι το διάνυσμα των διεγέρσεων εισόδου μεγέθους N_i , δηλαδή όσος και ο αριθμός των εισόδων και $U_{out}(t)$ είναι το διάνυσμα των εξόδων μεγέθους N_o , όσος δηλαδή και ο αριθμός των εξόδων. Φέρνοντας στο νου την εξίσωση (2.24) γίνεται αντιληπτό πως είναι στην ίδια ακριβώς μορφή, απλά οι πίνακες ονομάζονται και δε δίνεται η αναλυτική τους περιγραφή. Σε παραπάνω ενότητα επίσης παρουσιάστηκε και ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Laplace. Πράττοντας όμοια και στις εξισώσεις της (2.27) προκύπτει η εξής συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = L^T (G + sC)^{-1} B \quad (2.28)$$

Θα αποδειχθεί λοιπόν πως οι παραπάνω MNA εξισώσεις είναι όμοιες με τις δυναμικές.

Γίνεται υπόθεση πως ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος. Τότε πολλαπλασιάζοντας με αυτόν έχουμε:

$$\begin{aligned} G\underline{x} + C\dot{\underline{x}} &= Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ C^{-1}G\underline{x} + C^{-1}C\dot{\underline{x}} &= C^{-1}Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ \dot{\underline{x}} &= -C^{-1}G\underline{x} + C^{-1}Bu_{in}(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Θέτοντας τώρα

$$\begin{aligned} A &= -C^{-1}G \\ b &= C^{-1}B \end{aligned} \quad (2.30)$$

Κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης της (2.30) στη σχέση της (2.29) προκύπτει

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + bu_{in}$$

όπου είναι η καταστατική εξίσωση στη μορφή που αναφέρθηκε στη σχέση (2.9) (όμοια παρατηρείται πως είναι και εξίσωση της εξόδου, απλά διαφέρει ο συμβολισμός, το L δηλαδή είναι c). Έτσι λοιπόν καταλήγει ο συλλογισμός στη σχέση της συνάρτησης μεταφοράς όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενο χωρίο, δηλαδή στην εξίσωση:

$$H(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} b$$

Η συμπεριφορά κάθε θύρας (*port*) μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$YV = I$$

ή

$$\begin{aligned} ZI &= V \\ \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ο πίνακας Y , περιέχει αγωγιμότητες, ο V τάσεις και ο I ρεύματα.

Στον πίνακα Y οι μόνες πηγές που επιτρέπονται στο κύκλωμα είναι οι πηγές τάσης κατά μήκος των *ports*. Σ' αυτή την περίπτωση πραγματοποιούνται κάποιες αντικαταστάσεις στις MNA εξισώσεις. Το $u_{in}(t)$ αλλάζει σε $u_p(t)$ που είναι το διάνυσμα των τάσεων στα *ports* και το $u_{out}(t)$ σε $i_p(t)$ που είναι το διάνυσμα των ρευμάτων.

Επιπλέον, οι έξοδοι μπορούν να υπολογισθούν από τις εισόδους και μπορεί να φανεί πως $B = -L$. Έτσι οι σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} Gx + C \frac{dx}{dt} &= Bu_p(t) \\ i_p(t) &= -B^T x \end{aligned}$$

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

και ο πίνακας αντιμετάθεσης

$$Y(s) = -B^T(G + sC)^{-1}B$$

Και για τον πίνακα Z αντίστοιχα προκύπτει

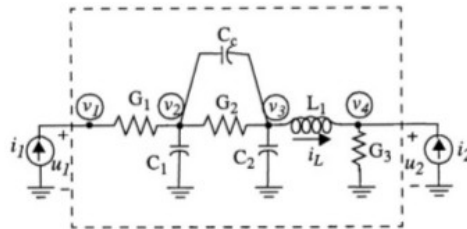
$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_p(t)$$

$$i_p(t) = B^T x$$

Έτσι

$$Z(s) = B^T(G + sC)^{-1}B$$

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω δίδεται το παρακάτω παράδειγμα [4]. Έστω το κύκλωμα του σχήματος (2.7): Δημιουργούνται οι πίνακες G , C και B , ενώ το διάνυσμα κατάστασης



Σχήμα 2.7: Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MNA εξισώσεων.

είναι το x :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2) & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (C_1 + C_2) & -C_c & 0 & 0 \\ 0 & -C_c & (C_c + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -L_1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_4 \\ I_L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_p = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, I_p = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, L = B$$

2.4 Ορθοκανονική βάση

Ένα σύνολο διανυσμάτων, το οποίο είναι ταυτόχρονα γραμμικώς ανεξάρτητο αλλά και παράγει τον χώρο, ονομάζεται βάση του διανυσματικού χώρου.

Δύο διανύσματα λέγεται πως είναι κάθετα μεταξύ τους όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Ορθογώνια βάση ενός διανυσματικού χώρου είναι μια βάση στην οποία κάθε διάνυσμά της είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα της βάσης.

Ορίζεται λοιπόν ως ορθοκανονική βάση ενός διανυσματικού χώρου μια ορθογώνια βάση, της οποίας κάθε διάνυσμα έχει μέτρο 1.

Από οποιαδήποτε βάση μπορεί να κατασκευαστεί μία ορθοκανονική, με κάποια διαδικασία ορθοκανονικοποίησης.

2.5 Υπόχωροι Krylov

Προκειμένου να δημιουργηθεί μια βάση σε έναν πίνακα, χρησιμοποιείται η ακολουθία *Krylov* [13]. Η ακολουθία αυτή όμως δεν είναι ορθοκανονική. Για το λόγο αυτό υπάρχουν οι κατάλληλες μέθοδοι, οι οποίες κάνουν αυτές τις ακολουθίες ορθοκανονικές. Στην παρούσα υλοποίηση για τη δημιουργία υποχώρου *Krylov*, χρησιμοποιείτε η επαναληπτική μέθοδος *Arnoldi*, η οποία βασίζεται στην εξής σχέση:

$$\text{colsp}(R, AR, A^2, \dots, A^k R) = K_r(A, R, q)$$

όπου $k = \frac{q}{N}$ ο αριθμός των επαναλήψεων και N ο αριθμός των στηλών του R .

Στη συνέχεια παρατίθεται έναν ενδεικτικό ψευδο-κώδικα με την υλοποίηση της *Arnoldi*.

Algorithm 1 Arnoldi Algorithm

```

1: procedure Arnoldi( $A, V, m$ )
2:  $q_1 = \frac{v}{\|v\|}$ ;
3:   for  $j = 0; j < m; j_{++}$  do
4:      $z = Aq_j$ ;
5:     for  $i = 0; i < j; i_{++}$  do
6:        $h_{i,j} = q_i^T z$ ;
7:        $z = z - h_{i,j} q_i$ ;
8:     end for
9:      $h_{j+1,j} = \|z\|$ ;
10:    if  $h_{j+1,j} == 0$  then
11:      quit;
12:    end if
13:     $q_{j+1} = \frac{z}{h_{j+1,j}}$ ;
14:  end for
15: end procedure

```

Έτσι προκύπτει η δημιουργία των πινάκων $Q_m \rightarrow n \times m$ και $H_m \rightarrow (m+1) \times m$. Από αυτούς τους δύο πίνακες παρατηρείται ότι ισχύει η σχέση:

$$AQ_m = Q_{m+1}H_m \quad (2.31)$$

Όπου ο πίνακας Q_m είναι της μορφής

$$Q_m = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m] \quad (2.32)$$

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

και ο πίνακας H_m είναι της μορφής

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Οι μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (*MOR*) είναι τεχνικές, οι οποίες αποσκοπούν στη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ή των μαθηματικών μοντέλων κατά τη διάρκεια κάποιας προσομοίωσης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα περιγραφεί μια τέτοια μέθοδος αναλυτικά.

3.1 Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου SPRIM

Ένας από τους σημαντικότερους αλγορίθμους MOR είναι αυτός της SPRIM. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της SPRIM είναι πως κατά την εφαρμογή της διατηρεί τη δομή του συστήματος. Οι πίνακες, όπως προαναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, αποτελούνται από υπό-πίνακες και οι πράξεις γίνονται στα υπό-μπλόκ του κάθε πίνακα [7].

Υλοποίηση της SPRIM

Ειδικότερα, θα παρουσιαστεί ο τρόπος υλοποίησης του αλγορίθμου. Η υλοποίηση της SPRIM βασίζεται πάνω στην MN ανάλυση του συστήματος και πιο συγκεκριμένα όπως αυτή περιγράφεται στη σχέση (2.24). Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των βημάτων κατά την υλοποίηση της SPRIM.

Αρχικά δίνονται σαν είσοδος οι εξής πίνακες:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Στη συνέχεια δημιουργούνται οι πίνακες A και R ως εξής:

$$A \equiv (G + sC)^{-1}C \quad (3.4)$$

$$R \equiv (G + sC)^{-1}B \quad (3.5)$$

Έπειτα, παράγεται ο υπό-χώρος *Krylov* με όποια μέθοδο είναι επιθυμητή. Στην παρούσα υλοποίηση χρησιμοποιήθηκε η *Arnoldi*.

$$\text{span}V_n = K_n(A, R) \quad (3.6)$$

Αμέσως μετά, σπάει ο πίνακας V_n σε block

$$V_n = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

και σε μορφή padding προκύπτει

$$V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

Έπειτα, είναι η ώρα να υπολογιστούν οι νέοι πίνακες που έχουν δημιουργηθεί μετά την ελαχιστοποίηση. Έτσι έχουμε:

$$\tilde{G}_1 = V_1^T G_1 V_1 \quad (3.8)$$

$$\tilde{G}_2 = V_2^T G_2 V_2 \quad (3.9)$$

$$\tilde{C}_1 = V_1^T C_1 V_1 \quad (3.10)$$

$$\tilde{C}_2 = V_2^T C_2 V_2 \quad (3.11)$$

$$\tilde{B}_1 = V_1^T B_1 \quad (3.12)$$

και μέσω αυτών τους πίνακες:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2^T \\ -\tilde{G}_2^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\tilde{C}_n = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Τέλος, από τους νέους πίνακες υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τον εξής τρόπο:

$$\tilde{Z}_n(s) = \tilde{B}_n^T (\tilde{G}_n + s\tilde{C}_n)^{-1} \tilde{B}_n \quad (3.16)$$

Παρατηρήσεις

Μέσα από τη μελέτη της μεθόδου παρατηρήθηκαν αρκετά πράγματα, τα οποία θα διευκρινιστούν με τη σειρά. Στην εξίσωση (3.3) παρατηρείται πως $\underline{S}_2(t) = 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή οι πίνακες που δέχεται σαν όρισμα η *SPRIM* πρέπει να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι ή αλλιώς *SPD*. Στην προσομοίωση κυκλωμάτων ένας πίνακας είναι *SPD* όταν δεν περιέχει πηγές τάσης και αυτεπαγωγές, δηλαδή στοιχεία της ομάδας 2.

Ακόμη έγινε αντιληπτό το εξής:

$$\begin{aligned}
 \text{Έστω } G &= \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}. \\
 V_n^T G V_n &= \\
 \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} V_1 G_1 & V_1^T G_2^T \\ -V_2^T G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} V_1^T G_1 V_1 & V_1^T G_2^T V_2 \\ -V_2^T G_2 V_1 & 0 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} V_1^T G_1 V_1 & (V_2^T G_2 V_1)^T \\ -V_2^T G_2 V_1 & 0 \end{bmatrix} & \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Τώρα, αν στην (3.17) τεθεί $\tilde{G}_1 = V_1^T G_1 V_1$ και $\tilde{G}_2 = V_2^T G_2 V_1$ προκύπτει η σχέση (3.13), δηλαδή:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2^T \\ -\tilde{G}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα για τους πίνακες $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ και $V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 V_n^T C V_n &= \\
 \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &=
 \end{aligned}$$

3. Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου

$$\begin{bmatrix} V_1^T C_1 & 0 \\ 0 & V_2^T C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T C_1 V_1 & 0 \\ 0 & V_2^T C_2 V_2 \end{bmatrix}$$

Τώρα, αν στην παραπάνω σχέση τεθεί $\tilde{C}_1 = V_1^T C_1 V_1$ και $\tilde{C}_2 = V_2^T C_2 V_2$ προκύπτει η σχέση (3.14), δηλαδή:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$$

Και τέλος για τους πίνακες $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} V_n^T B &= \\ \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Τώρα, αν στην παραπάνω σχέση τεθεί $\tilde{B}_1 = V_1^T B_1$ προκύπτει η σχέση (3.15), δηλαδή:

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης παρατηρήθηκε πως οι r μη-μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα U είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το ίδιο συμβαίνει και με τις r στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Ακόμη, η συμπεριφορά του κυκλώματος δεν αλλάζει. Παραμένει δηλαδή παθητική, όπως επίσης είναι απλό να γίνει η σύνθεση του νέου κυκλώματος.

Τέλος, ας θεωρηθεί πως όλες οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος είναι ημιτονοειδείς διεγέρσεις της ίδιας συχνότητας. Για ένα γραμμικό σύστημα οι αποκρίσεις $\underline{u}(t)$, $\underline{V}(t)$ και $\underline{i}(t)$ θα είναι επίσης ημιτονοειδείς της ίδιας συχνότητας.

Ένα ημιτονοειδές σήμα πλάτους A , κυκλικής συχνότητας ω και φάσης ϕ γράφεται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\dot{S}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t}, \quad (3.18)$$

όπου $\dot{A} \equiv Ae^{j\phi}$ ο παραστατικός μιγαδικός αριθμός (phasor) του σήματος $\dot{S}(t)$, ο οποίος ενσωματώνει την πληροφορία πλάτους και φάσης.

Σ' αυτή τη μορφή, οι εξισώσεις των πινάκων των στοιχείων της ομάδας $G_1 \rightarrow (R, L, C)$ και της ομάδας $G_2 \rightarrow (V, L)$ γράφονται στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση ως:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{i}}_1 e^{j\omega t} &= G \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + C \frac{d}{dt}(\dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t}) + \dot{\underline{S}}_1 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{i}}_1 e^{j\omega t} &= G \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + j\omega C \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + \dot{\underline{S}}_1 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{i}}_1 &= (G + j\omega C) \dot{\underline{u}}_1 + \dot{\underline{S}}_1\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{u}}_2 e^{j\omega t} &= L \dot{\underline{i}}_2 \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) + \dot{\underline{S}}_2 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{u}}_2 e^{j\omega t} &= j\omega L \dot{\underline{i}}_2 e^{j\omega t} + \dot{\underline{S}}_2 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{u}}_2 &= j\omega L \dot{\underline{i}}_2 + \dot{\underline{S}}_2\end{aligned}\quad (3.20)$$

Από τις εξισώσεις τοπολογίας (KCL και KVL) στις σχέσεις (2.28) και (2.29) προκύπτει το μιγαδικό σύστημα MNA:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1(G + j\omega C)A_1^T & A_2 \\ -A_2^T & -j\omega L \end{bmatrix}}_{\tilde{G}(j\omega)} \begin{bmatrix} \dot{\underline{U}} \\ \dot{\underline{i}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \dot{\underline{S}}_1 \\ \dot{\underline{S}}_2 \end{bmatrix}\quad (3.21)$$

Όπου ο πίνακας $\tilde{G}(j\omega)$ εξαρτάται από τη συχνότητα $\omega = 2\pi f$.

Κεφάλαιο 4

DEMOR: Μια διαφορετική προσέγγιση

Οι Μέθοδοι Υποβιβασμού Τάξης Μοντέλου (MOR) αποτελούν αποτελεσματική τεχνική για τη μείωση της πολυπλοκότητας του συστήματος ενώ ταυτόχρονα παράγουν και μια καλή προσέγγιση της συμπεριφοράς των εισόδων-εξόδων του [14].

Ωστόσο, η αποτελεσματικότητα της μείωσης ελαττώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των θυρών, γεγονός που παραμένει ένα μακροχρόνιο πρόβλημα. Ο λόγος της μείωσης είναι ότι οι υπάρχουσες προσεγγίσεις βασίζονται σε ένα πλαίσιο όπου κάθε ζευγάρι εισόδου-εξόδου αλληλεπιδρά εξίσου.

Σ' αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται ένα σχήμα μεθόδου υποβιβασμού τάξης μοντέλου, όπου ένα σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων (MIMO) μετατρέπεται σε έναν αριθμό υποσυστημάτων. Το κάθε υποσύστημα αντιστοιχεί σε μια έξοδο και αρκετές «ισχυρές» εισόδους [5].

Η διαδικασία της αποσύνδεσης, βασίζεται στο πίνακα διάταξης κέρδους RGA (Relative Gain Array), ο οποίος υπολογίζει το βαθμό αλληλεπίδρασης κάθε ζεύγους εισόδου-εξόδου. Μέσα από τη μελέτη κατέστη σαφές πως οι περισσότερες συσχετίσεις εισόδου-εξόδου δεν είναι σημαντικές, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά συμπαγή μοντέλα, ακόμη και για συστήματα με μεγάλο αριθμό θυρών.

4.1 Ιδανικά αποκεντρωμένα συστήματα

Ένα $p \times p$ γραμμικά χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα, όπως έχει αναφερθεί σε παραπάνω κεφάλαιο, μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω μοντέλο:

$$y(s) = H(s)u(s)$$

όπου $u(s)$ και $y(s)$ είναι τα διανύσματα εισόδων και εξόδων μεγέθους p και η $H(s)$ είναι ένας πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς. Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι διαγώνια, δηλαδή της μορφής

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{pp}(s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

τότε δεν υπάρχει αλληλεπίδραση και το σύστημα αποσυνδέεται σε p ανεξάρτητα υποσυστήματα. Σ' αυτή την περίπτωση, ένας ανεξάρτητος σχεδιασμός ελέγχου μπορεί να γίνει με βάση κάθε ζεύγος εισόδου-εξόδου.

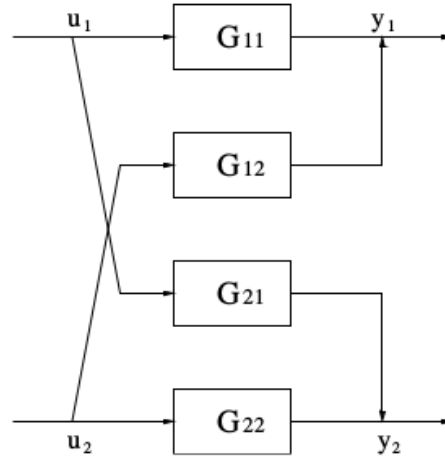
Πρακτικά είναι πολύ σπάνιο ένα σύστημα να βρεθεί στην ιδανική αποκεντρωμένη μορφή. Ωστόσο, είναι σπάνιο ότι κάθε έξοδος αλληλεπιδρά εξίσου με όλες τις εισόδους. Ως αποτέλεσμα πρέπει να υπολογιστεί πόσο ισχυρή θα είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των ζευγών εισόδων-εξόδων του συστήματος.

4.2 Πίνακας διάταξης κέρδους

Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, είναι πολύ σημαντικό να καταγραφούν οι συσχετίσεις μεταξύ των εισόδων και των εξόδων. Αυτή η διαδικασία γίνεται μέσω του πίνακα διάταξης κέρδους. Ο RGA λοιπόν, είναι ένας πίνακας που περιέχει τις τιμές των συσχετίσεων όλων των πιθανών συνδυασμών ενός γραμμικά χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων (MIMO), αλλά και μονών εισόδων - μονών εξόδων (SISO). Αυτή η έννοια έχει βρει ευρεία χρησιμότητα στην εύρεση ευστάθειας των συστημάτων. Ο RGA υποδεικνύει το ιδανικό ζεύγος εισόδων-εξόδων σ' ένα αποκεντρωμένο σύστημα ελέγχου (decentralized control system).

Παρακάτω, δίνεται ένα σύστημα μεγέθους 2×2 για να περιγραφεί με μεγαλύτερη λεπτομέρεια η έννοια του RGA.

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.1: Ενωμένο 2x2 σύστημα.

Όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα (4.1), g_{ij} είναι το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς h_{ij} . Αρχικά, δεδομένου πως το u_2 παραμένει σταθερό, μια βηματική αλλαγή στην είσοδο u_1 μεγέθους Δu_1 θα δημιουργήσει αλλαγή Δy_1 στην έξοδο y_1 . Έτσι λοιπόν, το κέρδος μεταξύ του u_1 και του y_1 , δεδομένου σταθερού u_2 , δίνεται από τη σχέση:

$$g_{11}|_{u_2} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1}|_{u_2} \quad (4.3)$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί και ως κέρδος ανοικτού βρόχου, σε σχέση με άλλους κόμβους. Έπειτα, αν παραμείνει σταθερή η έξοδος y_2 , μια βηματική αλλαγή στην είσοδο u_1 μεγέθους Δu_1 θα δημιουργήσει αλλαγή Δy_1 στην έξοδο y_1 . Σ' αυτή την περίπτωση το y_2 θα επηρεαστεί. Για να μείνει σταθερό, θα πρέπει να προσαρμοστεί αντίστοιχα το u_2 , πράγμα το οποίο θα συμβάλει στην αλλαγή του y_1 . Το κέρδος για τις παραπάνω συνθήκες δίνεται από τη σχέση:

$$g_{11}|_{y_2} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1}|_{y_2} \quad (4.4)$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί κέρδος κλειστού βρόχου σε σχέση με άλλα τερματικά. Αξίζει να σημειωθεί πως αν και οι δύο παραπάνω σχέσεις που μας δίνουν το κέρδος είναι μεταξύ του ίδιου ζεύγους μεταβλητών, οι τιμές τους μπορεί να είναι διαφορετικές, επειδή έχουν ληφθεί υπό διαφορετικές συνθήκες. Εάν υπάρχει αλληλεπίδραση, τότε η αλλαγή στο y_1 λόγω μιας αλλαγής στο u_1 και για τις δυο περιπτώσεις, θα ήταν διαφορετική. Έτσι, ορίζεται ως σχετικό κέρδος, ο λόγος μεταξύ της εξόδου y_1 με την είσοδο u_1 :

$$\Lambda_{11} = \frac{g_{11}|_{u_2}}{g_{11}|_{y_2}} \quad (4.5)$$

4. DEMOR: Μια διαφορετική προσέγγιση

Όμοια, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\lambda_{12} = \frac{g_{12}|_{u_1}}{g_{12}|_{y_2}} = \frac{(\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1})|_{u_1}}{(\frac{\Delta y_2}{\Delta u_1})|_{y_2}} \quad (4.6)$$

$$\lambda_{21} = \frac{g_{21}|_{u_2}}{g_{21}|_{y_1}} = \frac{(\frac{\Delta y_2}{\Delta u_1})|_{u_2}}{(\frac{\Delta y_2}{\Delta u_1})|_{y_1}} \quad (4.7)$$

$$\lambda_{22} = \frac{g_{22}|_{u_1}}{g_{22}|_{y_1}} = \frac{(\frac{\Delta y_2}{\Delta u_2})|_{u_1}}{(\frac{\Delta y_2}{\Delta u_2})|_{y_1}} \quad (4.8)$$

Επομένως, ο RGA πίνακας για το 2x2 σύστημα είναι:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Αν $\lambda_{11} = 0$, τότε μια μεταβολή στο u_1 δε θα επηρεάσει το y_1 . Έτσι, το u_1 δε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο του y_1 . Δηλαδή, τα u_1 και y_1 δε σχετίζονται.

Αν $\lambda_{11} = 1$, τότε το y_1 επηρεάζεται μόνο από το u_1 . Σ' ένα σύστημα κλειστού βρόγχου, μια αλλαγή στο u_1 θα προκαλέσει αλλαγή του y_1 λόγω των συζευξεων. Έτσι το u_2 θα αλλάξει και το y_2 θα πρέπει να διατηρηθεί σταθερό. Η αλλαγή στο u_2 όμως δεν επηρεάζει τελικά το y_1 καθώς τα δύο κέρδη είναι τα ίδια. Επομένως, δεν υπάρχει συσχέτιση του u_1 με το y_2 , ούτε του u_2 με το y_1 .

Αν $0 < \lambda_{11} < 1$, αυτό σημαίνει πως το κέρδος κλειστού βρόγχου είναι μεγαλύτερο από το κέρδος ανοικτού βρόγχου. Το κέρδος κλειστού βρόγχου αποτελείται από το άμεσο κέρδος του u_1 στο y_1 και το κέρδος έως τα ελεγχόμενα μέρη, τα οποία είναι από το u_2 μέχρι το y_1 . Αυτό σημαίνει πως το u_2 επηρεάζει το y_1 . Στην πραγματικότητα, μια αλλαγή στο y_1 λόγω μίας αλλαγής στο u_1 , μπορεί να αυξηθεί από την αλληλεπίδραση με τον άλλον βρόγχο. Όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι λ_{11} , τόσο περισσότερες επιπτώσεις υπάρχουν από το u_2 .

Αν $\lambda_{11} > 1$, τότε αυτό σημαίνει πως το κέρδος κλειστού βρόγχου είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ανοικτού. Η αλλαγή στο y_1 δεδομένης μιας αλλαγής στο u_1 , θα συγκρατηθεί από την αλληλεπίδραση από τον άλλον βρόγχο. Όσο μεγαλύτερο είναι το σχετικό κέρδος, τόσο μεγαλύτερο θα είναι αυτό το αποτέλεσμα. Σ' αυτή την περίπτωση, όσο κοντινότερα στο μηδέν είναι το λ_{11} , τόσο περισσότερες επιπτώσεις υπάρχουν από το u_2 .

Γενικότερα, για ένα σύστημα $H(s)$ με p εισόδους και p εξόδους, υπάρχουν $p \times p$ RGA στοιχεία:

$$\Lambda(H) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε στήλη, αλλά και σε κάθε γραμμή είναι ίσο με τη μονάδα. Δηλαδή ισχύει

$$\sum_{i=1}^p \lambda_{ij} = 1$$

και

$$\sum_{j=1}^p \lambda_{ij} = 1$$

Επομένως, ο RGA μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\Lambda(H) = H(0) \circ H(0)^{-T} \quad (4.11)$$

όπου H^{-T} είναι ο ανάστροφος πίνακας του H^{-1} και το \circ συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου με στοιχείο. Στο σημείο αυτό, θα ήταν ενδιαφέρον να αναφερθεί πως αν και ο RGA υπολογίζεται για μηδενική συχνότητα, είναι εφικτό να υπολογιστεί αυτός για οποιαδήποτε άλλη συχνότητα.

Στην παρούσα εργασία, ο RGA χρησιμοποιείται απλά για να περιγράψει τις συσχετίσεις και γι' αυτό το λόγο δε χρειάζεται ο σχεδιασμός κάποιου ελεγκτή. Επομένως για κάθε στοιχείο του πίνακα λήφθηκε η απόλυτη τιμή του και για εκείνα που ήταν μεγαλύτερα της μονάδας η αντίστροφη τιμή τους. Έτσι τα στοιχεία θα είναι στην περιοχή $[0,1]$. Άρα:

$$\lambda_{ij} = |\lambda_{ij}| (|\lambda_{ij}| \leq 1) \quad (4.12)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{|\lambda_{ij}|} (|\lambda_{ij}| > 1) \quad (4.13)$$

Έτσι για μια δεδομένη έξοδο i , αν η j είσοδος έχει μικρή επίδραση, τότε η τιμή της στον πίνακα RGA θα είναι

$$\lambda_{ij} \approx 0 \quad (4.14)$$

Ως εκ τούτου τίθεται ένα όριο ϵ , σύμφωνα με το οποίο θα επιλέγονται οι κυρίαρχες είσοδοι. Αφού λοιπόν αγνοηθούν όλες οι άσχετες είσοδοι στην i σειρά $\lambda_{ij} < \epsilon$, η κατάληξη είναι ένα αποκεντρωμένο υποσύστημα όσον αφορά την i έξοδο.

4.3 Ο αλγόριθμος DEMOR

Όπως έχει παρουσιαστεί και σ' άλλη ενότητα, η συνάρτηση μεταφοράς ενός RLC κυκλώματος δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = B^T(Cs + G)^{-1}B \quad (4.15)$$

και το κέρδος διανύσματος κατάστασης $H(0)$, είναι το DC κέρδος H_{DC}

$$H_{DC} = B^T G^{-1} B \quad (4.16)$$

Ο πίνακας RGA υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lambda(H) = H_{DC} \circ H_{DC}^{-T} \quad (4.17)$$

Στη συγκεκριμένη υλοποίηση χρησιμοποιήθηκε το DC κέρδος για να υπολογιστεί ο RGA , επειδή στο DC υπάρχει η μεγαλύτερη ενέργεια. Στην πραγματικότητα μπορεί να επιλεγθεί οποιαδήποτε άλλη συχνότητα. Αυτό πρέπει να πραγματοποιηθεί όταν ο πίνακας G είναι αντιστρέψιμος. Αξίζει να σημειωθεί πως πρέπει να υπολογιστεί ο αντίστροφος $p \times p$ H_{DC} πίνακας [16].

Αν υπάρχουν p έξοδοι $B^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]^T$, το σύστημα μπορεί να μετατραπεί σε p συστήματα, το καθένα από τα οποία θα αντιστοιχεί σε μία έξοδο

$$H_1(s) = b_1^T(sC + G)^{-1}B_1 \quad (4.18)$$

$$H_2(s) = b_2^T(sC + G)^{-1}B_2 \quad (4.19)$$

...

$$H_i(s) = b_i^T(sC + G)^{-1}B_i \quad (4.20)$$

...

$$H_p(s) = b_p^T(sC + G)^{-1}B_p \quad (4.21)$$

Μπορεί να παρατηρηθεί, πως η διαδικασία αποσύνθεσης του κυκλώματος δεν είναι μοναδική. Στην πραγματικότητα μπορούν να ομαδοποιηθούν πολλές έξοδοι σε ένα υπο-μοντέλο, εάν έχουν αντίστοιχες εξαρτίσεις στην είσοδο.

Για το i -ο μοντέλο, ο πίνακας B_i αποτελείται από τις κυρίαρχες εισόδους που αντιστοιχούν στην i έξοδο, η οποία προσδιορίζεται από τον πίνακα $RGA \ \Lambda(H)$.

Για RLC κυκλώματα, αν η i -η είσοδος είναι πηγή ρεύματος, τότε η i -η έξοδος, αντίστοιχα είναι τάση στην ίδια θύρα και αντίστροφα. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση της i -ης εισόδου με την i -η έξοδο.

Έστω ένα 5×5 σύστημα προκύπτει:

$$H(s) = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \\ b_4^T \\ b_5^T \end{bmatrix} (sC + G)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Αν γίνει η υπόθεση πως η έξοδος 1 αλληλεπιδρά με τις εισόδους 1 και 2, η έξοδος 2 με τις εισόδους 2 και 3, η έξοδος 3 με τις εισόδους 3 και 5, η έξοδος 4 με τις εισόδους 3, 4 και 5 και τέλος, η έξοδος 5 με την είσοδο 5. Το σύστημα μπορεί να αποκεντρωθεί ακολούθως (Σχήμα 4.2):

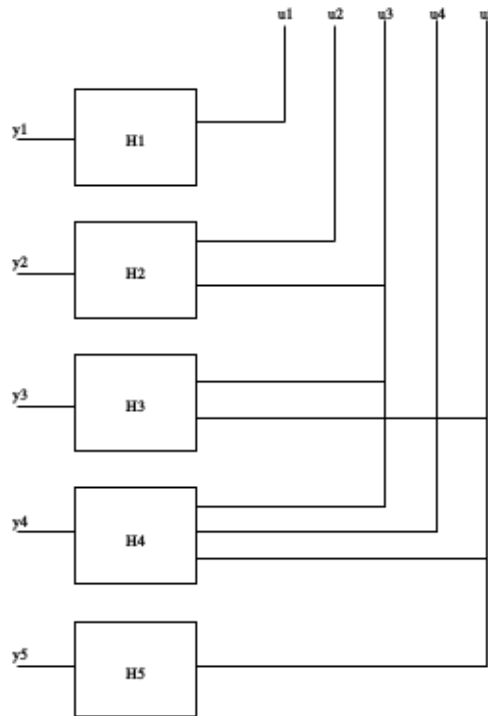
$$H_1(s) = B_1^T(sC + G)^{-1} [b_1 \ b_2] \quad (4.23)$$

$$H_2(s) = B_2^T(sC + G)^{-1} [b_2 \ b_3] \quad (4.24)$$

$$H_3(s) = B_3^T(sC + G)^{-1} [b_3 \ b_5] \quad (4.25)$$

$$H_4(s) = B_4^T(sC + G)^{-1} [b_3 \ b_4 \ b_5] \quad (4.26)$$

$$H_5(s) = B_5^T(sC + G)^{-1} b_5 \quad (4.27)$$



Σχήμα 4.2: Αποκεντρωμένο 5x5 σύστημα.

Στο παραπάνω παράδειγμα ασήμαντες συνεισφορές σήματος αγνοούνται πλήρως. Ωστόσο, αν οι ηλεκτρικές αποστάσεις μεταξύ των θυρών δεν είναι αρκετά μεγάλες, αυτές οι εισοδοί δεν μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιείται ένα πλαίσιο όπου τα συστήματα έχουν δημιουργηθεί από τους υποχώρους *Krylov* που αντιστοιχούν στα στιγμιότυπα των κυρίαρχων εισόδων, αλλά τυπικά οι μη-σημαντικές εισφορές εξακολουθούν να διατηρούνται.

Για το i αποκεντρωμένο μοντέλο, οι παραγόμενοι πίνακες V_i δημιουργούνται έτσι ώστε οι στήλες να προέρχονται από έναν υποχώρο *Krylov* $K_m(A, R_i)$, όπου $A = (G + sC)^{-1}C$ και

4. DEMOR: Μια διαφορετική προσέγγιση

$R_i = (G + sC)^{-1}B_i$. Το B_i περιέχει τις κυρίαρχες εισόδους που αντιστοιχούν στην i έξοδο. Για το i ελαχιστοποιημένο μοντέλο ισχύει:

$$\tilde{C}_i = V_i^T C V_i \quad (4.28)$$

$$\tilde{G}_i = V_i^T G V_i \quad (4.29)$$

$$\tilde{B}_i = V_i^T B \quad (4.30)$$

$$\tilde{L}_i = V_i^T L \quad (4.31)$$

Για κάθε ελαχιστοποιημένο μοντέλο έχουμε, $\tilde{C}_i \geq 0$, $\tilde{G}_i \geq 0$ και $\tilde{L}_i = \tilde{B}_i$. Έτσι, η παθητικότητα των στοιχείων μπορεί να διατηρηθεί. Ας σημειωθεί πως για το i ελαχιστοποιημένο μοντέλο, μόνο η i έξοδος είναι έγκυρη (η έξοδος αντιστοιχεί στην i σειρά των εξόδων του πίνακα L_i^T).

Algorithm 2 DEMOR Algorithm

```
1: procedure DeMOR( H: (C, G, B))
2:
3: Solve GM = B for  $M_0$ ;
4: Compute  $H_{DC} = B^T M_0$ 
5: Compute relative gain array  $\Lambda(H) = H_{DC} \circ H_{DC}^{-T}$ 
6: Scale the RGA values to the range of [0, 1]
7: Set the threshold  $\epsilon$ 
8:   for Output  $i \dots p$  do
9:     Determine the corresponding dominant input matrix  $B_i$ 
10:    Model order reduction using SPRIM to obtain  $\tilde{H}_i$ 
11:   end for
12: Return  $\tilde{H}_i$ : (  $\tilde{G}_i, \tilde{C}_i, \tilde{B}_i$  )
13:
14: end procedureDeMOR
```

Κεφάλαιο 5

Υλοποίηση μεθόδων MOR στην προσομοίωση κυκλωμάτων

5.1 Κατασκευή ενός προσομοιωτή

Κάθε προσομοίωση ξεκινά από το σημείο στο οποίο θα ληφθεί ένα αρχείο, το οποίο περιγράφει μέσα από έναν προκαθορισμένο τρόπο απεικόνισης κοινώς αποδεκτό μια συγκεκριμένη κυκλωματική συνδεσμολογία. Αυτή η μορφή απεικόνισης είναι όμοια για όλες σχεδόν τις εφαρμογές πάνω στην προσομοίωση κυκλωμάτων.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το αρχείο το οποίο επιλέγεται έχει μια συγκεκριμένη μορφή. Κάθε στοιχείο έχει το δικό του προκαθορισμένο όνομα, καθώς και μια συγκεκριμένη μορφή, από την οποία ορίζονται οι διάφορες παράμετροι του κάθε στοιχείου.

Αρχείο περιγραφής κυκλώματος

Σύμφωνα με τα προαναφερόμενα, το αρχικό στάδιο για τη δημιουργία ενός προσομοιωτή είναι το διάβασμα ενός αρχείου, το οποίο περιγράφει το κύκλωμα. Αυτή την πληροφορία, η οποία διαβάζεται από το αρχείο θα πρέπει να μεταφέρεται στον συγκεκριμένο προσομοιωτή. Γι' αυτό το λόγο διαβάζεται το αρχείο γραμμή γραμμή και στη συνέχεια όλες οι παράμετροι του κάθε στοιχείου.

Διαβάζοντας το αρχείο, πρέπει να αποθηκεύεται όλη αυτή την πληροφορία σε κάποια κατάλληλη δομή, ώστε να μη χρειάζεται να χρησιμοποιείτε συνεχώς το αρχείο σε κάθε επόμενη διαδικασία. Κάθε αρχείο περιέχει κόμβους, στους οποίους κάθε στοιχείο που περιέχεται συνδέεται με κάποιους από αυτούς. Όπως γίνεται αντιληπτό λοιπόν μέσα από τις γνώσεις στις δομές δεδομένων, μια από τις καλύτερες επιλογές πάνω σε δομή για το παρόν πρόβλημα είναι η αποθήκευση σε πίνακα κατακερματισμού (*hashtable*), ώστε να διευκολυνθεί η τακτοποίηση των στοιχείων.

Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτής της δομής δεδομένων είναι η γρηγορότερη αναζήτηση

σε σχέση πάντα με τις άλλες.

MNA σύστημα του κυκλώματος

Έπειτα και αφού καταστεί βέβαιο πως όλα πήγαν καλά με το διάβασμα του αρχείου και την αποθήκευση της πληροφορίας του στη δομή δεδομένων, μένει να κατασκευαστεί το σύστημα MNA του κυκλώματος. Η διαδικασία αυτή έχει περιγραφεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 και σ' αυτή τη φάση θα αναφερθεί επιγραμματικά.

Η βασική ιδέα είναι πως κάθε στοιχείο που διαβάζεται από το αρχείο και αποθηκεύεται στη δομή δεδομένων ανήκει και σε μια συγκεκριμένη ομάδα στοιχείων που επηρεάζουν ανάλογα τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Αυτές οι ομάδες είναι δύο. Η ομάδα 1, η οποία περιέχει αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος και η ομάδα 2, η οποία περιέχει πηνία και πηγές τάσεις [6].

Αφού δημιουργηθούν λοιπόν αυτές οι δύο ομάδες στοιχείων, χρησιμοποιούνται οι νόμους του *kirchhoff* και με τη βοήθεια αυτών παράγεται το MNA σύστημα του παρόντος κυκλώματος μας. Τα βήματα κατασκευής του MNA συστήματος είναι ακριβώς ίδια με αυτά που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2.

Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Από τη στιγμή που μοντελοποιηθεί το κύκλωμα που δόθηκε από το αρχικό αρχείο και παραχθεί το MNA σύστημα του κυκλώματος, είναι πλέον δυνατό να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου προκειμένου να απλοποιηθεί αυτό το σύστημα και στη συνέχεια να λυθεί το κύκλωμα πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό [3].

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, η μέθοδος MOR που μελετήθηκε αλλά και υλοποιήθηκε είναι η SPRIM. Ο αλγόριθμος της περιγράφηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.

Η SPRIM θα λάβει ως αρχικό όρισμα τους πίνακες C , G και B , όπου ο ορισμός αυτών έχει δοθεί στο κεφάλαιο 2. Έπειτα έχοντας αυτές τις εισόδους, εφαρμόζεται αναλυτικά ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3 προκειμένου να ληφθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα, μέσα από τη δημιουργία δηλαδή της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος και της συνάρτησης μεταφοράς που προκύπτει μετά τη χρήση της SPRIM να εξαχθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό θα ήταν άξιο σημασίας να αναφερθεί πως οι πίνακες θα πρέπει να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι (SPD), επομένως μέσα από κατάλληλη διαδικασία στο αρχικό διάβασμα του αρχείου υπήρξε η επιμέλεια να αφαιρεθούν οι πηγές τάσης και να αντικατασταθούν ανάλογα, ώστε να προκύπτει ισοδύναμο κύκλωμα με αυτό που δόθηκε στην αρχή

και χωρίς τη χρήση αυτών.

Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως για τη δημιουργία υπό-χώρων *Krylov*, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος *Arnoldi*, της οποίας ο αλγόριθμος παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

Εφαρμογή της νέας μεθόδου αποκεντρωποίησης συστημάτων

Το ήδη μοντελοποιημένο κύκλωμα, θα δοθεί ως είσοδος στο DEMOR ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που δόθηκε και στην SPRIM, δηλαδή θα λάβει ως αρχικό όρισμα τους πίνακες C , G και B , όπου ο ορισμός αυτών έχει δοθεί στο κεφάλαιο 2. Έπειτα αρχίζει αναλυτικά η διαδικασία του αποκεντρωποιημένου αλγορίθμου όπως αυτή κατέστη σαφής στο κεφάλαιο 4.

Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου που χρησιμοποιείται στο DEMOR για την μείωση της τάξης του κυκλώματος είναι η SPRIM, λεπτομέρειες της οποίας έχουν δοθεί στο κεφάλαιο 3.

Η διαφορά όμως προκύπτει στην επιλογή του πίνακα B . Αυτή η επιλογή προκύπτει έπειτα από επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προήλθαν από τον RGA. Δηλαδή, δε λαμβάνονται όλες οι εξαρτήσεις μεταξύ εισόδων και εξόδων, αλλά αυτές οι οποίες ο RGA μέσω ενός κατωφλίου ϵ θεώρησε σημαντικές.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει αναφορά στο ότι ο υποβιβασμός του μοντέλου στο DEMOR είναι σημαντικά μικρότερος από αυτόν στη SPRIM. Αυτό συμβαίνει λόγω της επιλογής συγκεκριμένων θυρών και όχι όλων.

Επιπρόσθετες παρατηρήσεις

Από τη νέα αυτή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να δημιουργηθεί ένα νέο ισοδύναμο κύκλωμα για το οποίο όμως είναι αναγκαίες πολύ λιγότερες απαιτήσεις προκειμένου να λυθεί. Σύμφωνα με τις επισημάνσεις που καταγράφηκαν στο πρώτο μέρος της εργασίας κατέστη προφανές ότι έγινε γρηγορότερη λύση του συστήματος, αλλά και απαιτήσεις μνήμης ήταν λιγότερες. Είναι απολύτως βέβαιο πως το νέο συρρικνωμένο σύστημα θα χρειάζεται λιγότερη χρήση μνήμης, αλλά ακόμη θα λύνεται και γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό.

Κεφάλαιο 6

Πειραματικά αποτελέσματα

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιαστεί ο τρόπος υλοποίησης της λύσης, καθώς και ορισμένα ενδεικτικά αποτελέσματα που αντλήθηκαν από κάποια πειραματικά αρχεία περιγραφής κυκλωμάτων της *IBM*, αλλά και του εργαστηρίου ηλεκτρονικής του τμήματος.

6.1 Ανάλυση υλοποίησης

Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εκτός από τη μελέτη των μεθόδων *MOR* και των υπό-χώρων *Krylov*, υλοποιήθηκαν και οι αντίστοιχες μέθοδοι. Οι μέθοδοι τις παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας υλοποιήθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού *C*.

Πιο συγκεκριμένα, στη μέθοδο *MOR*, η οποία μελετήθηκε και υλοποιήθηκε, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος *Arnoldi* για τη δημιουργία των υπό-χώρων *Krylov*. Επιπλέον υλοποιήθηκαν μέθοδοι αντιστροφής των πινάκων. Όλες οι μέθοδοι προγραμματίστηκαν σε *C* και επαληθεύτηκαν από το *MATLAB*.

Έτσι λοιπόν προγραμματίζοντας όλα τα παραπάνω κατέστη δυνατό να πραγματοποιηθούν προσομοιώσεις ώστε να διαπιστωθούν και στην πράξη οι δυνατότητες που παρέχει ένας αλγόριθμος *MOR*, δηλαδή κατά κύριο λόγο πόση μείωση θα υπάρξει στα διάφορα κυκλώματα μετά τη χρήση του αλγορίθμου.

Είναι ευρέως γνωστό πως ισχύει $s = 2\pi f$. Επομένως, θα πρέπει να γίνει κάποια κατάλληλη επιλογή συχνότητας ώστε να γίνει η δημιουργία των πινάκων (πχ $G + sC$). Επίσης θα πρέπει να οριστεί και με κατάλληλο τρόπο ο αριθμός των επαναλήψεων που θα κάνει η μέθοδος *Arnoldi* προκειμένου να δημιουργηθεί ο υπό-χώρος *Krylov*. Έτσι λοιπόν ο αριθμός των επαναλήψεων της *Arnoldi* υπολογίζεται από τη σχέση, $n = \lceil \frac{q}{N} \rceil$, ανάλογα με το αν το $\frac{q}{N}$ είναι ακέραιος ή όχι.

Ας υποθεθεί πως το μέγεθος του πίνακα *C* και *G* είναι $size \times size$ και το μέγεθος του πίνακα *B* είναι $size \times size_B$.

Η δημιουργία των νέων πινάκων θα δώσει πίνακες με τις εξής διαστάσεις:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow (size \times size) \times (size \times size) \rightarrow size \times size \\ R &\longrightarrow (size \times size) \times (size \times size_B) \rightarrow size \times size_B \\ \tilde{G} &\longrightarrow new_size \times new_size \\ \tilde{C} &\longrightarrow new_size \times new_size \\ \tilde{B} &\longrightarrow new_size \times size_B \end{aligned}$$

και τελικά λαμβάνεται η συνάρτηση μεταφοράς που θα είναι της παρακάτω διάστασης:

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{B}^T (\tilde{G} + s\tilde{C})^{-1} \tilde{B} \\ Z &\longrightarrow (size_B \times new_size) \times (new_size \times new_size) \times (new_size \times size_B) \\ Z &\longrightarrow (size_B \times size_B) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Κάνοντας αντίστοιχη διαδικασία και για τη διάσταση της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος προκύπτει:

$$\begin{aligned} Z &= B^T (G + sC)^{-1} B \\ Z &\longrightarrow (size_B \times size) \times (size \times size) \times (size \times size_B) \\ Z &\longrightarrow (size_B \times size_B) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις (6.1) και (6.2) παρατηρείται πως η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού, αλλά και του ελαττωμένου κυκλώματος που προέκυψε από τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου, έχουν την ίδια διάσταση.

Ακόμη θα ήταν χρήσιμο να αναφερθεί πως η φυσική σημασία του *size* είναι ουσιαστικά ο αριθμός των *states* (δηλαδή *node voltages*) και αυτός του *size_B* ο αριθμός των *I/O ports*.

6.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης

Για να ελεγχθεί η ορθότητα της λύσης, χρειάστηκε να γίνουν προσομοιώσεις. Αρχικά σε κυκλώματα μικρού μεγέθους ώστε να είναι ευκολότερο να αντληθούν συμπεράσματα ως προς την ορθότητα της λύσης και στη συνέχεια προσομοιώθηκαν κυκλώματα μεγάλου μεγέθους για πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα και εκτίμηση της υλοποίησης.

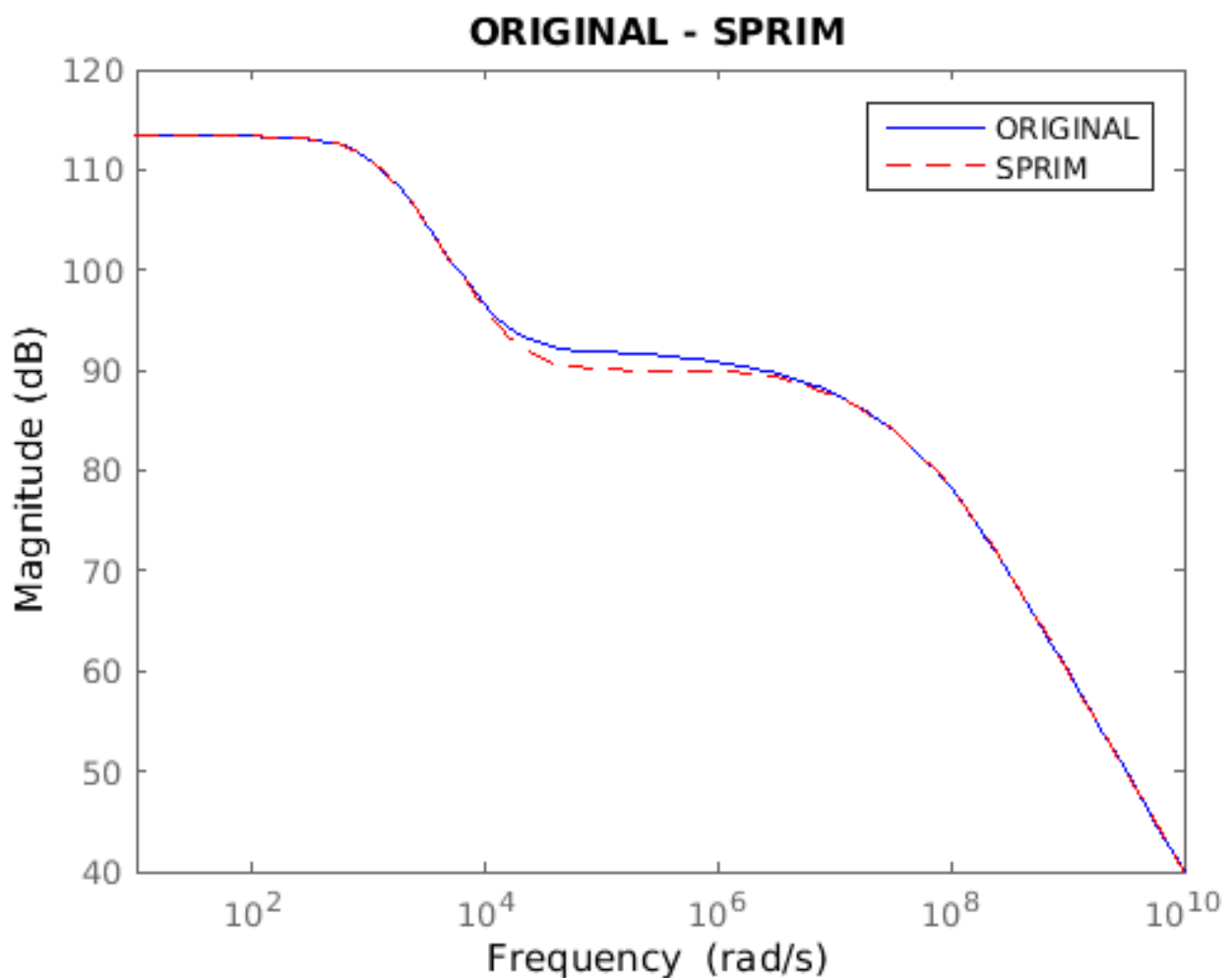
Στον πίνακα 6.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ενός ενδεικτικού κυκλώματος που χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο της υλοποίησης. Επίσης, οι πίνακες *C* και *G* είναι διάστασης 2000×2000 και ο πίνακας *B* 2000×100 .

Αριθμός θυρών	Αριθμός κόμβων
100	10000

Πίνακας 6.1: Ενδεικτικό benchmark.

Παρακάτω παρατίθενται μερικές ενδεικτικές κυματομορφές της απόκρισης συχνότητας, δηλαδή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος ως προς τη συχνότητα κάνοντας χρήση της μεθόδου SPRIM και του DEMOR σε σχέση πάντα με το αρχικό κύκλωμα. Οι παρακάτω μετρήσεις έγιναν στο *port* 1, αλλά αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στα υπόλοιπα 99.

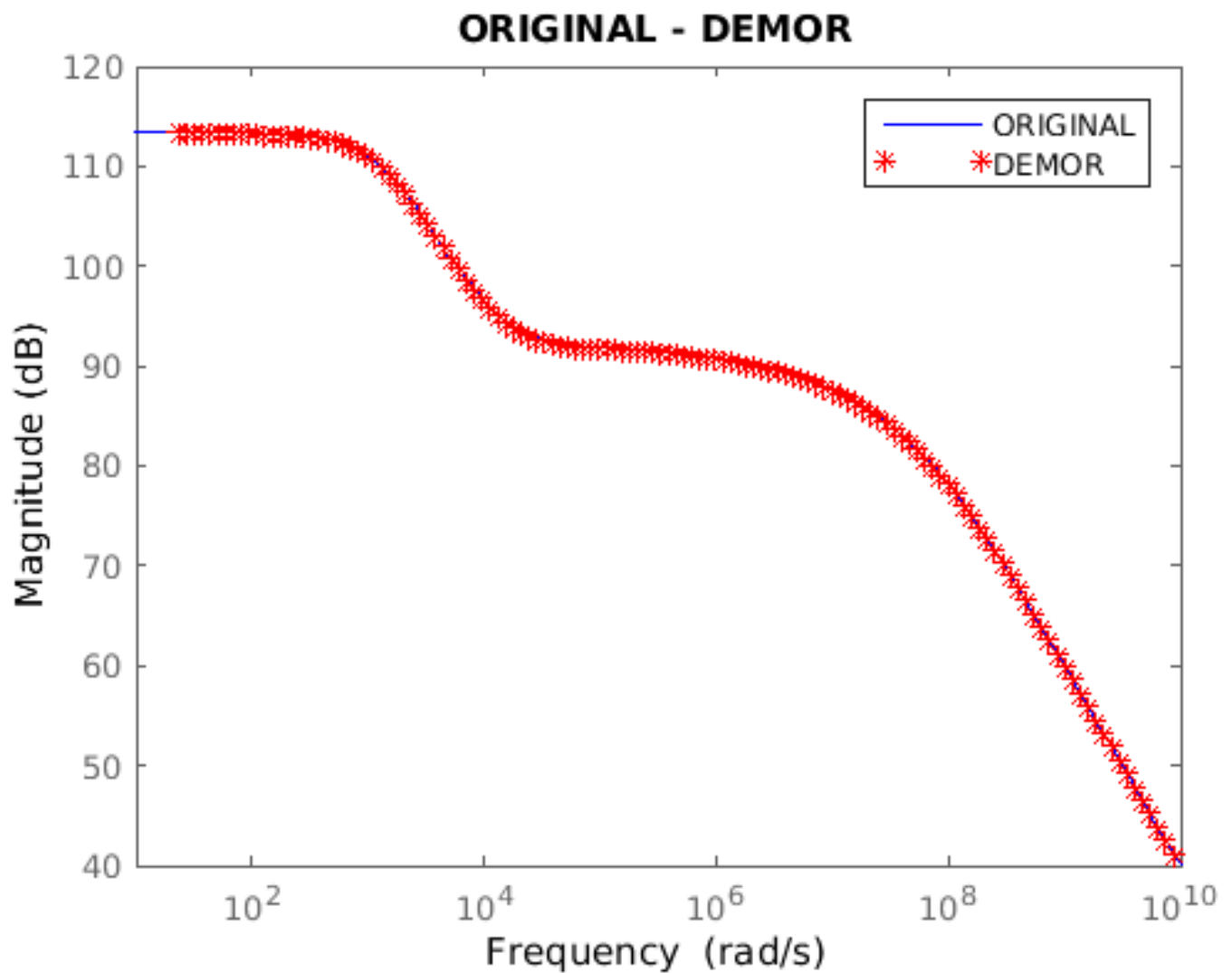
Αρχικά δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος σε σχέση με αυτή της *SPRIM* (Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1: ORIGINAL - SPRIM.

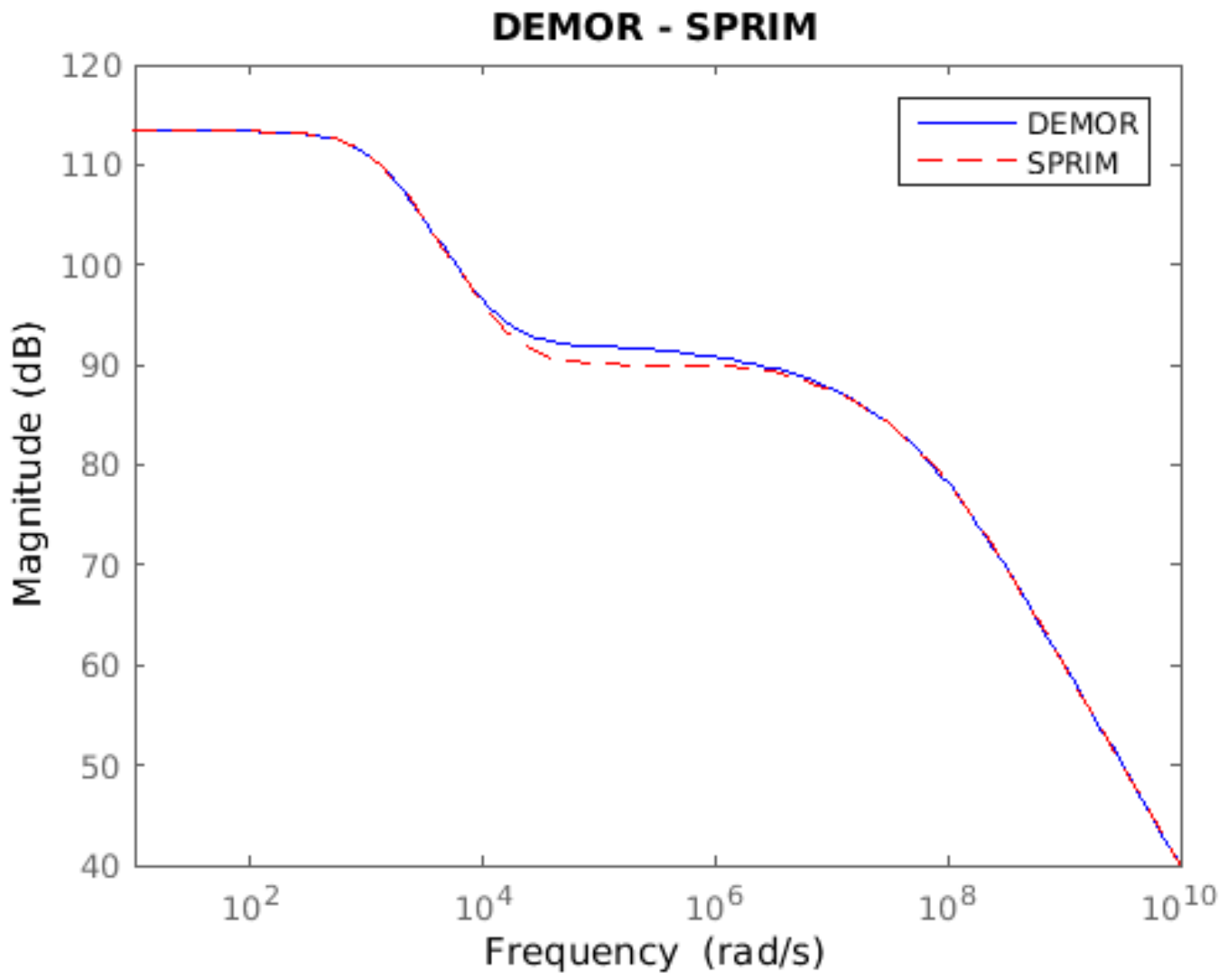
6. Πειραματικά αποτελέσματα

Έπειτα παρουσιάζεται η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού μας κυκλώματος, αλλά αυτή τη φορά με τη νέα μέθοδο που μελετήθηκε, αυτή του *DEMOR* (Σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2: ORIGINAL - DEMOR.

Τέλος, δίνεται ένα συγκριτικό διάγραμμα του *DEMOR* και της *SPRIM* για να φανεί πόσο μικρές είναι στην ουσία οι αποκλίσεις μεταξύ των δύο προσεγγίσεων (Σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3: DEMOR - SPRIM.

6. Πειραματικά αποτελέσματα

Τέλος, παρουσιάζεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τις διαστάσεις των μοντέλων, τον αριθμό των θυρών αλλά και τον αριθμό των στιγμιοτύπων:

Circuit	Model size	Number of ports	Number of moments
ORIGINAL	10000x10000	100	3
SPRIM	300x300	100	3
DEMOR	90x90	30	3

Πίνακας 6.2: Συγκεντρωτικό διάγραμμα αποτελεσμάτων.

6.3 Παρατηρήσεις

Μέσα από πειραματική μελέτη παρατηρήθηκε πως τα αποτελέσματα τόσο για την *SPRIM*, όσο και για το *DEMOR* προσεγγίζουν αρκετά το αρχικό μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα όμως διαπιστώθηκε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των *ports*, το *DEMOR* εξακολουθεί να έχει αποτελέσματα, τα οποία ταιριάζουν απόλυτα στην αρχική συνάρτηση μεταφοράς, σε αντίθεση με την *SPRIM* που αρχίζει να αποκλίνει σε ορισμένα σημεία, πράγμα το οποίο είναι ακριβώς αυτό που ήταν αναμενόμενο καθώς η μελέτη πάνω στο *DEMOR* έχει να κάνει με κυκλώματα πολύ μεγάλου αριθμού *ports*. Επομένως, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων ήταν τα προσδοκώμενα.

Αξίζει να σημειωθεί πως όλες οι προσομοιώσεις έγιναν πάνω σε σύστημα που είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

CPU	Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60GHz
Memory	16 GB
OS	14.04.1-Ubuntu x86_64 GNU/Linux
Kernel	3.16.0-62-generic

Πίνακας 6.3: Χαρακτηριστικά του συστήματος.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Μέσα από την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκε σε βάθος μια από τις πλέον σύγχρονες, αλλά ταυτόχρονα και πολλά υποσχόμενες τεχνικές που απασχολούν την έρευνα, αλλά και τη βιομηχανία στη σημερινή εποχή. Γενικότερα, η μελέτη επικεντρώθηκε στο τι είναι μια προσομοίωση, τι χρειάζεται για να γίνει και πως γίνεται να μοντελοποιηθεί ένα κύκλωμα που δίνεται μέσα από ένα αρχείο περιγραφής κυκλώματος. Ο βασικότερος όμως σκοπός κυμάνθηκε στον τρόπο με τον οποίο μπορούν αυτά τα κυκλώματα να λυθούν γρηγορότερα και με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων πόρων του συστήματος.

Με βάση τη μελέτη που έγινε πάνω στο *MOR* παρατηρήθηκε πως με την κατάλληλη επιλογή των *moments* στην *Arnoldi*, επιτυγχάνεται μείωση τάξης μοντέλου. Το σύστημα που προέκυπτε όμως από αυτή τη μείωση είχε όμοια συμπεριφορά μ' αυτή του αρχικού. Ακόμη έγιναν πειράματα και διαπιστώθηκε πως υπάρχουν τεχνικές, σύμφωνα με τις οποίες μπορούν να επιτευχθούν αποτελέσματα πολύ κοντά σ' αυτά των αρχικών κυκλωμάτων, όσο μεγάλος και αν είναι ο αριθμός των *ports*.

7.1 Μελλοντικές προεκτάσεις

Πιθανές προεκτάσεις στην παρούσα εργασία θα μπορούσαν να είναι:

- Ολοκλήρωση του συστήματος έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο αρχείο περιγραφής κυκλώματος και λύση αυτού του νέου κυκλώματος.
- Ενδεχόμενη παραλληλοποίηση ορισμένων σταδίων της υλοποίησης προκειμένου να επιτευχθούν γρηγορότερα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Athanasios C Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*, volume 6. Siam, 2005.
- [2] Athanasios C Antoulas. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual reviews in Control*, 29(2):181–190, 2005.
- [3] Chrysostomos A. Chatzigeorgiou. Model order reduction techniques for circuits with large number of ports. B.S. thesis, 2015.
- [4] Timothy A Davis. *Direct methods for sparse linear systems*, volume 2. Siam, 2006.
- [5] Peter Feldmann. Model order reduction techniques for linear systems with large numbers of terminals. In *Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe-Volume 2*, page 20944. IEEE Computer Society, 2004.
- [6] Peter Feldmann and Frank Liu. Sparse and efficient reduced order modeling of linear subcircuits with large number of terminals. In *Proceedings of the 2004 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design*, pages 88–92. IEEE Computer Society, 2004.
- [7] Roland W Freund. Sprim: structure-preserving reduced-order interconnect macromodeling. In *Proceedings of the 2004 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design*, pages 80–87. IEEE Computer Society, 2004.
- [8] Peng Li and Weiping Shi. Model order reduction of linear networks with massive ports via frequency-dependent port packing. In *Proceedings of the 43rd annual Design Automation Conference*, pages 267–272. ACM, 2006.
- [9] Farid N Najm. Solution of differential circuit equations. *Circuit Simulation*, pages 201–303.
- [10] Farid N Najm. *Circuit simulation*. John Wiley & Sons, 2010.
- [11] Wilhelmus HA Schilders, Henk A Van der Vorst, and Joost Rommes. *Model order reduction: theory, research aspects and applications*, volume 13. Springer, 2008.
- [12] Joao MS Silva and L Miguel Silveira. On the effectiveness of reducing large linear networks with many ports. In *Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. IEEE International Symposium on*, pages 2694–2697. IEEE, 2007.
- [13] Gilbert Strang, Gilbert Strang, Gilbert Strang, and Gilbert Strang. *Introduction to linear algebra*, volume 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.

- [14] Sheldon Tan and Lei He. *Advanced model order reduction techniques in VLSI design*. Cambridge University Press, 2007.
- [15] Σέργιος Θεοδωρίδης, Κ Μπερμπερίδης, and Λ Κοφίδης. Εισαγωγή στη θεωρία σημάτων και συστημάτων. Αθήνα: Τυπωθήτω-Εκδόσεις Γιώργου Δαρδανού, 2003.
- [16] Boyuan Yan, Lingfei Zhou, Sheldon X-D Tan, Jie Chen, and Bruce McGaughy. Demor: Decentralized model order reduction of linear networks with massive ports. In *Proceedings of the 45th annual Design Automation Conference*, pages 409–414. ACM, 2008.